Aula 26

Séries de Potências

Definição: Dada uma função f holomorfa em z_0 chama-se **série de Taylor** de f centrada em z_0 à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Chama-se também **série de MacLaurin** ao caso particular da série de Taylor centrada na origem, ou seja, com $z_0 = 0$.

Definição: Diz-se que uma função é analítica num ponto interior ao seu domínio se ela é infinitamente diferenciável e coincide com a correspondente série de Taylor numa vizinhança centrada nesse ponto.

Teorema (Taylor): Se $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa num ponto (interior) $z_0 \in D_f$ então f é analítica nesse ponto. Ou seja, f é igual à sua série de Taylor em torno desse ponto

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \end{aligned}$$

com a igualdade válida (pelo menos) na maior bola centrada em z_0 e contida no domínio de holomorfia de f.

Exemplos:

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}$

- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \qquad z \in \mathbb{C}$

- $\text{sen}\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad z \in \mathbb{C}$

- $\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \qquad |z| < 1$

Zeros de Funções Holomorfas

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $z_0 \in D_f$. Diz-se que f tem um **zero de ordem** k em z_0 se $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Ou seja, se a série de Taylor de f em torno de z_0 é da forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1} + \cdots \\ &= (z-z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \cdots\right] \\ &= (z-z_0)^k g(z), \end{aligned}$$

com g holomorfa em z_0 e $g(z_0) \neq 0$.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $z_0 \in D_f$ e $f(z_0) = 0$. Então, ou existe uma bola centrada em z_0 tal que esse é o único ponto onde f se anula (é um zero isolado), ou f é identicamente nula na maior bola de holomorfia de f centrada em z_0 e contida em D_f.

Corolário: Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções holomorfas no domínio Ω e tais que existe uma sucessão convergente de **pontos distintos** $z_n \to z_0$ em Ω, onde $f(z_n) = g(z_n)$. Então $f(z) = g(z)$ para z na maior bola centrada em z_0 e contida em Ω.

Séries de Laurent

$$\overbrace{\cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)}}^{\text{Parte Principal ou Singular}} + \\ + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots}_{\text{Parte Regular}}$$

Teorema (Laurent): Se $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa na coroa circular $0 \leq r_1 < |z - z_0| < r_2 \leq \infty$. Então, para todo o z nessa coroa, é válido o desenvolvimento em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

em que os coeficientes são dados de forma única por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z)(z-z_0)^{n-1}\, dz \quad n = 1, 2, \ldots$$

para qualquer $r_1 < r < r_2$. Em particular

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 2\pi i\, b_1.$$

Definição: Diz-se que z_0 é uma **singularidade isolada** de f, se f é holomorfa em $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ para algum $\delta > 0$ (e f, ou não está definida, ou não é diferenciável em z_0).
Designa-se por **resíduo de f em** z_0, e representa-se por $\text{Res}(f, z_0)$, o coeficiente da correspondente série de Laurent centrada em z_0, na coroa $0 < |z - z_0| < \delta$.

Teorema dos Resíduos: Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região e f holomorfa em Ω à exceção dum número finito de singularidades isoladas distintas $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \Omega$. Seja γ um caminho fechado que não passa por nenhum dos z_j, e homotópico a um ponto em Ω. Então

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} I(\gamma, z_j)\text{Res}(f, z_j).$$